ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HỒNG

DÃY FIBONACCI MODULO *m*

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HỒNG

DÃY FIBONACCI MODULO *m*

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN DUY TÂN

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Dãy số Fibonacci được Fibonacci, một nhà toán học người Ý, công bố vào năm 1202 trong cuốn sách *Liber Abacci* qua hai bài toán: Bài toán con thỏ và Bài toán số các "cụ tổ" của một ong đực. *Bài toán con thỏ* có thể được phát biểu là: *"Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và thỏ cái); một đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, sau mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau n tháng có bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm có một đôi thỏ sơ sinh?".*

Dãy Fibonacci là dãy số tự nhiên thỏa mãn quy tắc $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Tuy đơn giản về quy tắc thiết lập nhưng dãy số Fibonacci chứa đựng vô cùng nhiều những tính chất đẹp đẽ và bất ngờ trong toán học. Nó bí ẩn và lí thú đến mức có hẳn tạp chí *The Fibonacci Quarterly* hoàn toàn chỉ xuất bản các kết quả nghiên cứu về dãy số này.

Dãy Fibonacci F_n định nghĩa bởi công thức $F_0 = 0, F_1 = 1$ và $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, với $n \geq 2$, là một dãy số quan trọng trong Toán học. Cho m là một số nguyên dương. Xét dãy số F_n modulo m, ký hiệu dãy này là $F \pmod{m}$. Khi đó dãy này là một dãy tuần hoàn đơn. Ta ký hiệu chu kỳ của dãy $F \pmod{m}$ là $k(m)$. Chẳng hạn,

$$
\begin{aligned}
F &\pmod{3} = 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 2, 0, \ldots \\
F &\pmod{4} = 0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, \ldots \\
F &\pmod{5} = 0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 1, 1, \ldots
\end{aligned}
$$

Như vậy $k(3) = 4$, $k(4) = 6$ và $k(5) = 10$.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu một số tính chất số học thú vị của hàm $k(m)$ và một số vấn đề liên quan.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, bố cục của luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này sẽ dành để giới thiệu ngắn gọn một số thông tin ban đầu và trình bày một số kiến thức về dãy Fibonacci, một số đồng nhất thức liên quan cần thiết cho các chương sau.

Chương 2. Dãy Fibonacci modulo m

Chương này trình bày về một số tính chất của chu kỳ $k(m)$ của dãy Fibonacci modulo m.

Chương 3. Số không trong dãy Fibonacci modulo m

Chương này trình bày về ví trí số 0 đầu tiên , cũng như về số số 0 trong một chu kỳ của dãy Fibonacci modulo m.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Duy Tân (Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Thầy hướng dẫn, tới các thầy cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán K12B - Trường Đại học Khoa học đã động viên giúp đỡ trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Nhân đây, tôi cũng xin chân thành cảm ơn Khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình học tập của tôi. Tôi cũng xin được cảm ơn sự nhiệt tình giảng dạy của các giảng viên trong suốt thời gian học tập. Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu Trường

Cuối cùng, tác giả muốn dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến đại gia đình vì những động viên và chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 1 tháng 10 năm 2019

Tác giả

Phạm Thị Hồng

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị về dãy Fibonacci và sơ lược về thặng dư toàn phương và luật thuận nghịch bậc hai. Tất cả những kết quả trong chương này có thể được tìm thấy trong [1] hoặc [4].

1.1. Dãy Fibonacci

Mặc dù có nhiều đóng góp cho toán học, nhưng ngày nay, Fibonacci được nhớ đến nhờ dãy số nảy sinh từ một vấn đề mà ông đặt ra trong *Liber Abaci*. Sau đây là một cách diễn đạt:

> *Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và thỏ cái); một đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, sau mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau n tháng có bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm có một đôi thỏ sơ sinh?*

Nếu giả sử rằng cặp đầu tiên không sinh sản cho đến cuối tháng thứ hai, thì trong hai tháng đầu tiên sẽ chỉ có một cặp. Vào đầu tháng thứ ba, cặp đầu tiên sẽ sinh ra một cặp, chúng ta tổng cộng hai cặp. Trong tháng thứ tư, cặp ban đầu lại sinh ra nhưng cặp thứ hai thì không, cho chúng ta ba cặp, v.v.

Giả sử không có con thỏ nào bị chết, chúng ta có thể xác lập một quan hệ truy hồi. Giả sử F_n cặp thỏ trong tháng n, và F_{n+1} cặp thỏ trong tháng $n+1$. Trong suốt tháng $n+2$, tất cả số thỏ từ tháng $n+1$ sẽ vẫn giữ nguyên, và những con thỏ đó tồn tại trong tháng thứ n sẽ sinh sản.

Do đó
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$
Dãy số này, với $F_1 = F_2 = 1$, được gọi là *dãy Fibonacci*, và các số hạng trong dãy số này được gọi là các *số Fibonacci*,

$$n : 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12 \ldots$$
$$F_n : 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ 21\ 34\ 55\ 89\ 144 \ldots$$

Đến đây, câu trả lời của bài toán Fibonacci là 144.

Điều thú vị là mãi đến năm 1634, quan hệ truy hồi phát này mới được Albert Girard viết ra.

Dãy Fibonacci là dãy số tự nhiên thỏa mãn quy tắc $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Tuy đơn giản về quy tắc thiết lập nhưng dãy số Fibonacci chứa đựng vô cùng nhiều những tính chất đẹp đẽ và bất ngờ trong toán học. Nó bí ẩn và lí thú đến mức có hẳn tạp chí *The Fibonacci Quarterly* hoàn toàn chỉ xuất bản các kết quả nghiên cứu về dãy số này.

Dãy Fibonacci là dãy cho bởi $F_0 = 0, F_1 = 1$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$. Dưới đây là một số số hạng đầu tiên của dãy Fibonacci.

$$F_n : 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ 21\ 34\ 55 \ldots$$

Đồng nhất thức 1.1. $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$.

Chứng minh. Ta cố định m, và chứng minh đồng nhất thức trên quy nạp theo n. Với $n = 1$ thì

$$F_{m+1} = F_{m-1} + F_m = F_{m-1}F_1 + F_mF_2.$$

Như vậy khẳng định đang cần chứng minh đúng với $n = 1$.

Giả sử đồng nhất thức đang xét đúng với $n = 1, 2, 3, \ldots, k$. Ta cần chứng minh rằng nó đúng với $n = k + 1$. Theo giả thiết quy nạp,

$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1}$$

và
$$F_{m+(k-1)} = F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k.$$

Cộng theo vế hai đẳng thức này ta nhận được

$$F_{m+k} + F_{m+(k-1)} = F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k).$$

Suy ra

$$F_{m+(k+1)} = F_{m-1}F_{k+1} + F_m F_{k+2},$$

và do vậy đồng nhất thức đúng với $n = k + 1$. □

Ví dụ, ta có

$$F_{12} = F_{8+4} = F_7F_4 + F_8F_5 = 13(3) + 21(5) = 144.$$

Để thuận tiện, ta mở rộng dãy Fibonacci cho các chỉ số âm bởi công thức truy hồi, $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$, $n = -1, -2, \ldots$.

$$\begin{array}{lccccccccccccccc} n: & \cdots & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ F_n: & \cdots & 13 & -8 & 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array}$$

Dãy Fibonacci được mở rộng về cả hai phía của trục số như vậy có thể được gọi là *dãy Fibonacci "song phương"*.

Ta có một đồng nhất thức thú vị sau.

Đồng nhất thức 1.2. $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$.

Bây giờ ta kết hợp hai đồng nhất thức trên để nhận được

Đồng nhất thức 1.3. $F_{m-n} = (-1)^n(F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n)$.

Định lý 1.4. *Ta có $F_m \mid F_{mn}$ với mọi số nguyên m và n.*

Chứng minh. Giả sử m được cố định và ta sẽ thực hiện quy nạp theo n. Nếu m hoặc n bằng không, thì định lý hiển nhiên đúng. Với $n = 1$ thì rõ ràng $F_m \mid F_m$.

Giả sử kết luận của định lý đúng với với $n = 1, 2, \cdots, k$ và ta sẽ chứng minh rằng nó đúng với $n = k + 1$. Sử dụng đồng nhất thức 1.1 ta thấy

$$F_{m(k+1)} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}.$$

Theo giả thiết quy nạp $F_m \mid F_{mk}$, và do đó F_m chia hết vế phải của đẳng thức trên. Do đó F_m chia hết $F_{m(k+1)}$. Như vậy định lý được chứng minh cho mọi $n \geq 1$. Do F_{mn} sai khác với F_{-mn} cùng lắm là nhân tử -1, nên ta cũng có $F_m \mid F_{mn}$ với $n \leq -1$. □

Đồng nhất thức 1.5. *Ta có* $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

Chứng minh. Từ đồng nhất thức 1.1, ta có

$$
\begin{aligned}
F_{2n+1} = F_{n+(n+1)} &= F_{n-1}F_{n+1} + F_nF_{n+2} \\
&= F_{n-1}F_{n+1} + F_n(F_n + F_{n+1}) \\
&= F_n^2 + (F_{n-1} + F_n)F_{n+1} \\
&= F_n^2 + F_{n+1}^2.
\end{aligned}
$$

□

Sau đây là một đồng nhất thức khác chứa bình phương của các số Fibonacci.

Đồng nhất thức 1.6. $F_{n+1}F_{n-1} - F_{2n} = (-1)^n$.

Chứng minh. Ta có

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_{2n} &= (F_{n-1} + F_n)F_{n-1} - F_{2n} \\
&= F_{n-1}^2 + F_n(F_{n-1} - F_n) \\
&= F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2} \\
&= -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2).
\end{aligned}
$$

Bây giờ chúng ta có thể lặp lại quá trình trên cho dòng cuối cùng ở trên đây để nhận được

$$
\begin{aligned}
-(F_nF_{n-2} - F_{2n-1}) &= (-1)^2(F_{n-1}F_{n-3} - F_{2n-2}) \\
&= (-1)^3(F_{n-2}F_{n-4} - F_{2n-3}) \\
&\;\;\vdots \\
&= (-1)^n(F_1F_-1 - F_0^2) \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}
$$

Phép chứng minh được kết thúc. □

Nhà lý thuyết số thế kỷ 19 Edouard Lucas là người đầu tiên đặt tên của Fibonacci vào dãy số mà chúng ta đang nghiên cứu. Edouard Lucas cũng khảo sát các tổng quát hóa của dãy số này.

Một dãy Fibonacci tổng quát G_n, là một dãy số xác định bởi quan hệ truy hồi quen thuộc $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$ nhưng G_0 và G_1 có thể nhận giá trị bất kỳ. Dãy Lucas, ký hiệu là L_n, là một ví dụ cho dãy Fibonacci tổng quát trong đó $L_0 = 2$ và $L_1 = 1$. Các số tiếp theo là 2, 1, 3, 4, 7, 11, $\cdots$

Chúng ta sẽ kết thúc mục này bằng hai đồng nhất thức chứa các dãy Fibonacci tổng quát, xem [4].

Đồng nhất thức 1.7. *Ta có* $G_{m+n} = F_{n-1}G_m + F_nG_{m+1}$.

Chứng minh. Với trường hợp $n = 0$ và $n = 1$ ta có

$$G_m = F_{-1}G_m + F_0G_{m+1}G_{m+1} = F_0G_m + F_1G_m + 1$$

hai đẳng thức trên là đúng bởi vì $F_{-1} = 1$, $F_0 = 0$, và $F_1 = 1$. Cộng hai phương trình ta thấy đồng nhất thức đúng với $n = 2, 3, \ldots$ Trừ theo vế của phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta nhận được đồng nhất thức đúng với các số n âm. Phép chứng minh được hoàn thành. □

Đồng nhất thức 1.8. *Ta có* $G_{m-n} = (-1)^n(F_nG_{m+1} - F_{n+1}G_m)$.

Chứng minh. Thay thế $-n$ cho n trong đồng nhất thức trên và sử dụng đồng nhất thức 1.2 ta nhận được điều phải chứng minh. □

1.2. Công thức Binet

Đặt $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ và $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$. Khi đó ta có Công thức Binet tính số F_n theo n.

Mệnh đề 1.9. *Với mọi* $n \geq 0$, *ta có*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Ta có thể chứng minh công thức này bằng quy nạp theo n. Dễ kiểm tra công thức đúng với $n = 0$ và $n = 1$. Giả sử công thức đã